1) Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange που παρεμβάλει την $f(x) = \sin x$, στα σημεία 60, 70, 80 και 90

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Lagrange

$L_i(x) = \quad i = 0, 1, 2, 3, 4.$

- $L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \dfrac{(x-70)(x-80)(x-90)}{-6000}$

- $L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \dfrac{(x-60)(x-80)(x-90)}{2000}$

- $L_2(x) = \dfrac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \dfrac{(x-60)(x-70)(x-90)}{-2000}$

- $L_3(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \dfrac{(x-60)(x-70)(x-80)}{6000}$

Άρα, τα πολυώνυμα Lagrange είναι:

$$P(x) = L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2) + L_3 f(x_3) =$$

$$= \sin 60 \cdot \frac{(x-70)(x-80)(x-90)}{-6000} + \sin 70 \, \frac{(x-60)(x-80)(x-90)}{2000} +$$

$$+ \sin 80 \, \frac{(x-60)(x-70)(x-90)}{-2000} + \sin 90 \, \frac{(x-60)(x-70)(x-8)}{6000}$$

2) Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής Newton που παρεμβάλλει τη συνάρτηση $f(x)=\log x$ στα σημεία 2, 3 και 4.

ΛΥΣΗ

Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι:

$$P(x)=\alpha_0+\alpha_1(x-x_0)+\alpha_2(x-x_0)(x-x_1)=$$
$$=\alpha_0+\alpha_1(x-2)+\alpha_2(x-2)(x-3).$$

με $P(x_0)=\alpha_0 \Rightarrow P(2)=\alpha_0$

αλλά, $P(2)=f(2)=\log 2$ $\Rightarrow \boxed{\alpha_0=\log 2}$

όμοια, $P(x_1)=\alpha_0+\alpha_1(x-x_0) \Rightarrow P(3)=\log 2+\alpha_1(3-2)=\log 2+\alpha_1$

αλλά, $P(3)=f(3)=\log 3$

Συνεπώς, $\boxed{\alpha_1=\log 3-\log 2}$.

Επίσης, $P(4)=\log 2+2\log 3-2\log 2+2\alpha_2$

αλλά $P(4)=f(4)=\log 4$

Συνεπώς, $\boxed{\alpha_2=\dfrac{\log 4-2\cdot\log 3+\log 2}{2}}$

Τελικά, $P(x)=\log 2+(\log 3-\log 2)(x-2)+\dfrac{\log 4-2\log 3+\log 2}{2}\cdot(x-2)(x-3)$

3) Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής του Newton που παρεμβάλλει στα σημεία (10,5), (14,1), (18,-3) (22,89)

ΛΥΣΗ

x_i	10	14	18	22
$f(x_i)$	5	1	-3	89

Αναγκαστικά θα κάνουμε χρήση διαιρεμένων διαφορών Newton.

ΠΙΝΑΚΑΣ

i	x_i	$\Delta^0(x_i)(f)$	$\Delta^1(x_i, x_{i+1})(f)$	$\Delta^2(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$\Delta^3(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$
0	10	5			
			-1		
1	14	1		0	
			-1		$-\frac{1}{4}$
2	18	-3		3	
			23		
3	22	89			

$$\Delta^1(x_0,x_1)(f) = \frac{\Delta^0(x_1)-\Delta^0(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{1-5}{14-10} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\Delta^1(x_1,x_2)(f) = \frac{\Delta^0(x_2)-\Delta^0(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{-3-1}{18-14} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\Delta^1(x_2,x_3)(f) = \frac{\Delta^0(x_3)-\Delta^0(x_2)}{x_3-x_2} = \frac{89+3}{22-18} = \frac{92}{4} = 23$$

$$\Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f) = \frac{\Delta^1(x_1,x_2)-\Delta^1(x_0,x_1)}{x_2-x_0} = \frac{-1+1}{18-10} = 0$$

$$\Delta^2(x_1,x_2,x_3)(f) = \frac{\Delta^1(x_2,x_3)-\Delta^1(x_1,x_2)}{x_3-x_1} = \frac{23+1}{22-14} = \frac{24}{8} = 3$$

$$\Delta^3(x_0,x_1,x_2,x_3)(f) = \frac{\Delta^2(x_1,x_2,x_3)-\Delta^2(x_0,x_1,x_2)}{x_3-x_0} = \frac{0-3}{12} = -\frac{1}{4}$$

$$P(x) = \Delta^0(x_0)(f) + \Delta^1(x_0,x_1)(f)(x-x_0) + \Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f)(x-x_0)(x-x_1) +$$
$$+ \Delta^3(x_0,x_1,x_2,x_3)(f)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = \dots$$

[illegible]